ministère
éducation
nationale
jeunesse
vie associative

EFE MSP 1
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2012

CAPLP
CONCOURS EXTERNE
ET CAFEP

Section : MATHÉMATIQUES – SCIENCES-PHYSIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

Ce dossier comporte :

- **Un sujet composé de 8 pages**
- **Une annexe à rendre obligatoirement avec la copie**

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants.
Le premier exercice est un test vrai-faux avec justification.
Le deuxième exercice est un problème d'analyse comportant la recherche des solutions d'équations différentielles, l'étude d'une fonction puis d'une suite numérique.
Le troisième exercice porte sur l'étude de transformations géométriques à l'aide des nombres complexes.

Exercice 1

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou est fausse puis justifier la réponse.

1. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a-d \leq b-c$.

2. Soient deux réels a et b tels que $ab > 0$. Alors $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

3. La courbe représentative d'une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ peut avoir une tangente verticale.

4. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction définie, dérivable sur l'intervalle $[a,b]$ et s'il existe un réel x_0 appartenant à $]a,b[$ tel que $f'(x_0) = 0$ alors la fonction f change de variations au moins une fois sur l'intervalle $[a,b]$.

5. Si une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors cette suite est croissante.

6. Si une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle qu'il existe un nombre réel $k \in]0,1[$ et un nombre réel α tels que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

7. On admet que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.

La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

8. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction définie, continue par morceaux et positive sur l'intervalle $[a,b]$ et si $\int_a^b f(t)dt = 0$ alors f est nulle sur l'intervalle $[a,b]$.

9. La durée de vie d'un composant électronique est représentée par une variable aléatoire X. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
Alors pour tout réel t strictement positif, $P_{X\geq t}(X \geq t+10)$ ne dépend pas du réel t.

10. On désigne par Y la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un jeu.
La loi de probabilité de Y est donnée dans le tableau suivant :

Valeur prise par Y	-10	-7	0	3	12	16
Probabilité	0,15	0,25	0,20	0,20	0,15	0,05

Alors le jeu ainsi proposé est équitable.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2

On considère les deux équations différentielles suivantes, notées (E_1) et (E_2) :

(E_1) : $xy' + (1-x)y = 1$ définie sur $\mathrm{I}_1 =]-\infty, 0[$

(E_2) : $xy' + (1-x)y = 1$ définie sur $\mathrm{I}_2 =]0, +\infty[$

A. Résolution

1. Pour chaque équation différentielle proposée, donner les solutions de l'équation homogène associée.

2. On considère la fonction φ définie sur I_1 par $\varphi(x) = C(x)\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ où C désigne une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $\mathrm{I}_1 =]-\infty, 0[$.

a. Déterminer la forme des fonctions C pour que la fonction φ soit une solution particulière de (E_1) sur l'intervalle $\mathrm{I}_1 =]-\infty, 0[$.

b. Montrer que les solutions de (E_1) sont de la forme $y : x \mapsto y(x) = \dfrac{K_1\mathrm{e}^x - 1}{x}$ où $K_1 \in \mathbb{R}$.

3. Donner sans justification la forme des solutions de l'équation (E_2).

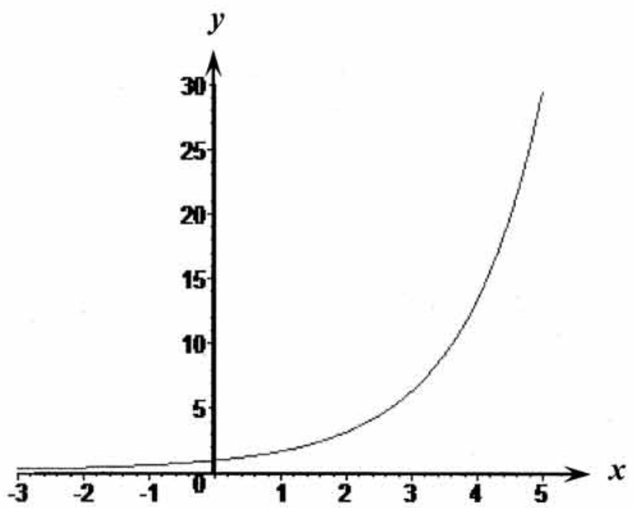
4. Soit $K \in \mathbb{R}$.
Montrer que la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\Phi : x \mapsto \dfrac{K\mathrm{e}^x - 1}{x}$ admet une limite finie en 0 si et seulement si $K = 1$.

B. Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-contre :



Afin d'étudier le comportement de la fonction f, on utilise un tableur et on obtient les résultats suivants :

Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ?

E29 fx

	A	B	C	D	E	F	G
1		x	$f(x)$				
2	1	1	1,71828183		0,71828183	0,71828183	
3	2	0,1	1,05170918		0,05170918	0,51709181	
4	3	0,01	1,00501671		0,00501671	0,50167084	
5	4	0,001	1,00050017		0,00050017	0,50016671	
6	5	0,0001	1,00005		5,0002E-05	0,50001667	
7	6	0,00001	1,000005		5E-06	0,5000007	
8	7	0,000001	1,0000005		4,9996E-07	0,49996218	
9	8						
10	9	-1	0,63212056		-0,36787944	0,36787944	
11	10	-0,1	0,95162582		-0,04837418	0,4837418	
12	11	-0,01	0,99501663		-0,00498337	0,49833749	
13	12	-0,001	0,99950017		-0,00049983	0,49983338	
14	13	-0,0001	0,99995		-4,9998E-05	0,49998333	
15	14	-0,00001	0,999995		-5E-06	0,49999828	
16	15	-0,000001	0,9999995		-5,0002E-07	0,50001569	
17							
18							

1. *Etude locale de la fonction f*

a. Quelle conjecture sur la fonction f les informations contenues dans les colonnes B et C du tableau permettent-elles de faire ?

Cette conjecture est notée C_1.

b. Ecrire les formules concernant les cellules E2 et F2 ainsi que E3 et F3.

c. Que représentent les nombres qui apparaissent respectivement dans les colonnes E et F ?

d. Quelle conjecture sur la fonction f les informations contenues dans la colonne F permettent-elles de faire ?

Cette conjecture est notée C_2.

2. *Démonstration des conjectures* $\mathbf{C_1}$ *et* $\mathbf{C_2}$

a. Montrer que le développement limité de la fonction f en 0 à l'ordre 2 est donné par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

b. Démontrer les conjectures C_1 et C_2.

3. ***Conjectures établies à partir de la courbe représentative de la fonction f***

   a. A l'aide de la courbe représentative fournie page 3, que peut-on conjecturer sur la branche infinie de la représentation graphique de la fonction f en $-\infty$?

   b. De même, que peut-on conjecturer sur la branche infinie de la représentation graphique de la fonction f en $+\infty$?

   c. Démontrer ces deux conjectures.

4. ***Etude des variations de la fonction f***

   a. Montrer que la fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

   b. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

   c. En déduire les variations de la fonction f et donner son tableau de variation.

C. Étude d'une suite numérique

On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} k(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} - 1 & \text{si } x \neq 0 \\ k(0) = 0 \end{cases}$$

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = k(u_n)$.

1. Donner le tableau de variation de la fonction k.

2. Montrer que $0 < u_1 < u_0$.

3. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < u_{n+1} < u_n$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

5. On note L la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   a. Montrer que : $0 \leq L < 1$ et $L = k(L)$.

   b. Montrer que : $(L = 0)$ ou $(L \in\,]0,1[$ et $e^L = L^2 + L + 1)$.

   En étudiant les variations de la fonction ω définie sur $[0,1]$ par $\omega(x) = e^x - (x^2 + x + 1)$, montrer que : $\forall\, x \in\,]0,1[,\ \omega(x) \neq 0$.

   En déduire la valeur de L.

Exercice 3

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, et $\mathbb{P}$ le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 4 cm. ***Toutes les constructions demandées se feront dans le plan rapporté à ce repère.***

On appelle i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

A chaque question, il est possible d'utiliser les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été établis.

Partie A

Dans cette partie, f désigne l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ qui, à tout nombre complexe z non nul, associe le nombre complexe z' défini par $z' = \frac{1}{z}$ et F désigne la transformation géométrique associée qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $f(z)$.

On note M_1 le symétrique du point M par rapport à l'axe (Ox).

1. Pour tout point M du plan $\mathbb{P}$ distinct du point O, montrer que OM × OM' = 1 et que le point M' appartient à la demi-droite $[OM_1)$.

2. Montrer que l'application f est involutive, c'est-à-dire que, pour tout nombre complexe z non nul, $f \circ f(z) = z$.

3. Soit z un nombre complexe non nul. On note $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = f(z) = x' + \mathrm{i}y'$, où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

Exprimer x et y en fonction de x' et de y'.

4. ***Image d'une droite par F***

a. Soit D_1 la droite d'équation $2x + 2y + 1 = 0$.

Montrer que l'image de la droite D_1 par F est l'ensemble $\mathcal{C}_1$ d'équation $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$, privé du point O.

Déterminer la nature de l'ensemble $\mathcal{C}_1$ et préciser ses éléments caractéristiques.

Construire D_1 et $\mathcal{C}_1$.

b. ***Cas général***

Soit D une droite d'équation $ax + by + c = 0$, où a et b sont des réels non tous deux nuls.

Donner une équation de l'ensemble Γ tel que l'image de la droite D privée du point O par F est l'ensemble Γ privé du point O.

En déduire que, dans le cas où c est non nul, Γ est un cercle que l'on note $\mathcal{C}$.

Préciser le rayon du cercle $\mathcal{C}$ et les coordonnées de son centre, noté Ω, en fonction de a, b et c.

c. Déduire de la question 4.b. que, dans le cas où $c = 0$, Γ est une droite d'équation $ax - by = 0$, que l'on note Δ.

Préciser la transformation S du plan telle que la droite Δ soit l'image de la droite D par S.

d. Construire la droite D et le cercle $\mathcal{C}$ pour $a = 1$, $b = 0$ et $c = -2$.

e. A l'aide des résultats précédents, donner une équation de l'ensemble D_2 dont l'image par F est l'ensemble Γ_2 d'équation $x^2 + y^2 - y = 0$, privé de O.

Construire ces deux ensembles.

Partie B

Application : Diagramme de Smith

Dans l'étude du déplacement dans un conducteur d'une onde électrique avec présence d'une onde réfléchie, on est amené, en électronique, à étudier un nombre complexe z représentant une impédance réduite.
z s'exprime sous la forme $z = x + \mathrm{i}y$ où x représente la résistance réduite et y la réactance réduite.

Pour l'étude de cette impédance, on travaille sur un nombre complexe z' défini par $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$ (z est différent de -1).

Dans cette partie, f désigne l'application de $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ qui, à tout nombre complexe z différent de -1, associe le nombre complexe z' défini par $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$ et F désigne la transformation géométrique associée à f qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$.

1. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $z' = 1 - \dfrac{2}{z+1}$.

2. On note $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = f(z) = x' + \mathrm{i}y'$ où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

Montrer que $x = \dfrac{-x'^2 - y'^2 + 1}{(x'-1)^2 + y'^2}$.

3. On appelle Δ_a la droite d'équation $x = a$, où a est une constante réelle positive ou nulle.

a. ***Cas $a = 0$***

Montrer que Γ_0, image de la droite Δ_0 par F, est le cercle de centre O et de rayon 1, privé du point A d'affixe 1.

b. ***Cas $a = 1$***

Montrer que Γ_1, image de la droite Δ_1 par F, est le cercle de centre Ω_1 d'affixe $\omega_1 = \dfrac{1}{2}$ et de rayon $R_1 = \dfrac{1}{2}$, privé du point A d'affixe 1.

4. *Cas général*

On admet que Γ_a, image de la droite Δ_a par *F*, est un cercle de centre Ω_a d'affixe $\omega_a = \frac{a}{a+1}$ et de rayon $R_a = \frac{1}{a+1}$, privé du point A d'affixe 1.

Pour concevoir des réseaux d'adaptation d'une source d'impédance complexe à une charge d'impédance complexe on utilise l'abaque de Smith. Cet abaque représente les images des droites Δ_a d'équation $x = a$ pour a allant de 0 à 20 (a désignant des résistances réduites) et les images des droites D_b d'équation $y = b$ pour b allant de -20 à $+20$ (b désignant des réactances réduites) par la transformation géométrique F. Ces images permettent de représenter l'impédance réduite z.

Le graphique fourni en annexe représente une simplification de l'abaque de Smith.
On a représenté sur ce graphique les points Z_0 et Z_1 représentant les impédances réduites respectivement égales à (0 + 0,4i) et à (1 + 2,5i).

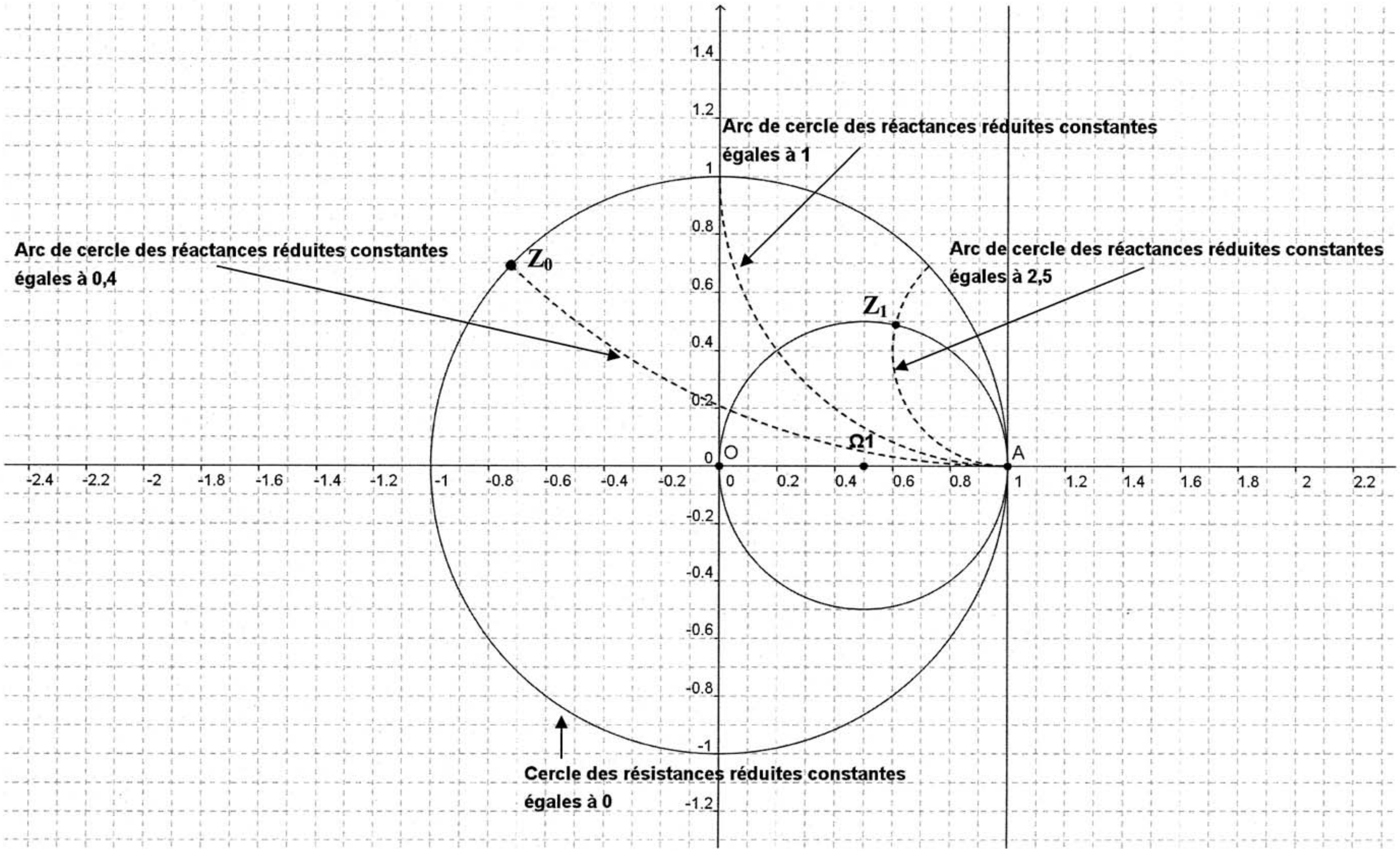
a. Placer sur ce graphique le point Z_2 représentant l'impédance égale à 3 + 2,5i.

b. Expliquer la construction précédente.

Note : les notations habituellement utilisées en électronique sont différentes mais les notations usuelles en mathématiques ont été privilégiées afin de faciliter la lecture.

EFE MSP 1

ANNEXE à rendre avec votre copie



Arc de cercle des réactances réduites constantes
égales à 1
Arc de cercle des réactances réduites constantes
égales à 0,4
Arc de cercle des réactances réduites constantes
égales à 2,5
Z0
Z1
Ω1
O
A
Cercle des résistances réduites constantes
égales à 0